数理解析研究所講究録
437巻 1981年 1-10

Twisted Product の Surgery 積公式

岡山大 理　吉田朋好

Surgery の障害に関してその積公式を求めることは、かなり以前から問題であった。$f: M^n \longrightarrow N^n$ を n 次元コンパクト多様体の間の写像度1の normal map で、その Surgery 障害が $\sigma(f) \in L_n^s(\pi, w)$ で与えられているとする。ただし、$\pi = \pi_1(N^n)$, w = 1st Stiefel-Whitney class of N^n とする。L^k を向きづけられた閉じた多様体とし $f \times 1: M^n \times L^k \longrightarrow N^n \times L^k$ とするとき、$f \times 1$ の Surgery 障害 $\sigma(f \times 1) \in L_{n+k}^s(\pi \times \pi', w)$ を $\sigma(f)$ と L^k の不変量であらわすのが積公式である（ここに $\pi' = \pi_1(L^k)$）。$\pi' \neq \{1\}$ の場合は、非常にむずかしく、ごくわずかの特殊な例について解かれているだけである。$\sigma(f)$ から $\sigma(f \times 1)$ を出そうとする際に、一番問題になる点は、$\sigma(f \times 1)$ が L^k のホモロジーではなく一般に L^k の chain 複体の性質に depend するこ

とであり、このために $\sigma(f) \to \sigma(f\times 1)$ の変換は $\pi' = \pi_1(L^k)$ によっては非常に複雑になると思われる。

他方 $\pi' = \{1\}$ の場合は、問題は完全に解かれている。すなわち J.W. Morgan, A product formula for surgery obstructions, Memoirs of A.M.S. No 201 によれば、L^k が単連結の場合は $\sigma(f\times 1)$ は L^k の有向同境類のみに depend し $\sigma(f) \to \sigma(f\times 1)$ は次の pairing により与えられる。

$$
\begin{array}{ccc}
L_n(\pi)\otimes\Omega_{4\ell} & \longrightarrow & L_{n+4\ell}(\pi) \\
\big\downarrow \scriptstyle{Id\otimes \text{signature}} & & \| \\
L_n(\pi)\otimes \mathbb{Z} & \longrightarrow & L_n(\pi)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
L_n(\pi)\otimes\Omega_{4\ell+1} & \longrightarrow & L_{n+4\ell+1}(\pi) \\
\big\downarrow \scriptstyle{Id\otimes \text{de Rham inv.}} & & \| \\
L_n(\pi)\otimes \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & L_{n+1}(\pi)
\end{array}
$$

その他は0。 L^k が単連結の場合は、上の式を見てわかるように $\sigma(f\times 1)$ は L^k のホモロジーのみに depend することになり、そのために L^k が単連結でない場合に比較して格段にやさしくなることになる。Morgan の証明は Morgan-Sullivan [6] で使われた幾何学的な

テクニックを駆使して行われ、$\sigma(f\times 1)$ が L^k のホモロジーのみに depend することの証明に多くの部分がさかれる。

一方 A. Ranicki は [4], [5] において、'Algebraic Surgery Theory' といわれるものを構成し、Surgery の積公式に関して、ホモトピー的・ホモロジー代数的手法により、非常に一般的な公式を与えた。ただし、Ranicki の積公式は、個々の具体的な $\pi'=\pi_1(L^k)$ については、何の情報も与えない。ただ、上の Morgan の積公式は、Ranicki の方法により一つの特殊な場合として、代数的テクニックにより得られる。

この小論に於ては、Ranicki の手法により Morgan の積公式の equivariant analogue を得ることを示す。

$f: M^n \longrightarrow N^n$, $\sigma(f)\in L_n^s(\pi, w)$ を写像度 1 の normal map 及びその Surgery 障害とする。$\phi: \pi\to G$ を π から有限群 G の上への準同型写像とする。L^k を向きづけられた閉多様体で G が作用していると仮定する。$\chi: G\longrightarrow \{\pm 1\}$ を、$g\in G$ に対し、g が L^k の向きを保つとき、$\chi(g)=+1$, g が L^k の向きを逆にす

るとき $\chi(g)=-1$ として定める。このような G-多様体 L^k を G-χ-多様体とよぶことにする。G-χ-多様体 L^k を $\phi: \pi \longrightarrow G$ により π-作用のある多様体と考える。$\widetilde{M}^n$, $\widetilde{N}^n$ をそれぞれ M^n, N^n の普遍被覆空間とし、$\mathcal{F}: \widetilde{M}^n \longrightarrow \widetilde{N}^n$ を f の被覆写像とする。$\widetilde{M}^n \times_\pi L^k$, $\widetilde{N}^n \times_\pi L^k$ をそれぞれ $\widetilde{M}^n \times L^k$, $\widetilde{N}^n \times L^k$ の π-対角作用による商空間とすれば、積写像 $\mathcal{F} \times 1: \widetilde{M}^n \times L^k \longrightarrow \widetilde{N}^n \times L^k$ は写像 $\mathcal{F} \times_\pi 1: \widetilde{M}^n \times_\pi L^k \longrightarrow \widetilde{N}^n \times_\pi L^k$ を induce する。この写像には、自然な方法により写像度 1 の normal map としての構造が入れられる。そこで $\mathcal{F} \times_\pi 1$ の Surgery 障害を考えるのであるが、これは $L^s_{n+k}(\pi_1(\widetilde{N}^n \times_\pi L^k), w\chi)$ の中にある。今、$p: \widetilde{N}^n \times_\pi L^k \longrightarrow N^n$ を第一成分への射影とすれば、これは準同型写像 p_*: $L^s_{n+k}(\pi_1(\widetilde{N}^n \times_\pi L^k), w\chi) \longrightarrow L^s_{n+k}(\pi, w\chi)$ を induce する。$\mathcal{F} \times_\pi 1$ の Surgery 障害類の p_* による像を $\sigma(\mathcal{F} \times_\pi 1) \in L^s_{n+k}(\pi, w\chi)$ とあらわすことし、$\sigma(\mathcal{F} \times_\pi 1)$ を $\sigma(f)$ と L^k の不変量によって表現することを考える。

G-χ-多様体により、普通の方法で G-χ-同境類が定義され、これを $\Omega^\chi_*(G)$ とあらわすことにする。対

応 $\sigma(f) \to \sigma(F \times_\pi 1)$ は L^k の $\Omega_k^{\chi}(G)$ での class のみに depend し pairing $\Omega_k^{\chi}(G) \otimes L_n^s(\pi, w) \longrightarrow L_{n+k}^s(\pi, w\chi)$ をもたらす。又、代数的に G-χ Witt 群なるものが定義され（後に定義を示す）、それを $GW_*^{\chi}(G, \mathbb{Z})$ とあらわすとき 準同型写像 $\rho : \Omega_*^{\chi}(G) \longrightarrow GW_*^{\chi}(G, \mathbb{Z})$ が、

$$[L^{2k}] \longrightarrow \langle H^k(L^{2k}, \mathbb{Z})/Tor, \ \text{intersection form} \rangle$$

$$[L^{2k+1}] \longrightarrow \langle Tor\, H^{k+1}(L^{2k+1}, \mathbb{Z}), \ \text{linking form} \rangle$$

として定義される。

又、全く代数的な仕方で pairing

$$GW_k^{\chi}(G, \mathbb{Z}) \otimes L_n^s(\pi, w) \longrightarrow L_{n+k}^s(\pi, w\chi)$$

が定義される。以上の準備のもとで Morgan の積公式の equivariant analogue は次の commutative diagram で与えられる。

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_k^{\chi}(G) \otimes L_n^s(\pi, w) & \longrightarrow & L_{n+k}^s(\pi, w\chi) \\
{\scriptstyle \rho \otimes 1} \downarrow & & \| \\
GW_k^{\chi}(G, \mathbb{Z}) \otimes L_n^s(\pi, w) & \longrightarrow & L_{n+k}^s(\pi, w\chi)
\end{array}$$

，ここに上の写像は $\sigma(f) \to \sigma(F \times_\pi 1)$ により与えられるもの、下の写像は、代数的に定義される pairing である。

上の公式を適用しようとすれば、$GW_*^{\chi}(G,\mathbb{Z})$の構造についての知識が必要になる。$*$=偶数、$G$=奇数位数の有限群、$\chi$= trivial map の場合には、$GW_{2m}(G,\mathbb{Z})$ の構造はかなりよくわかっている［1］。この場合には、Atiyah-Bott の多重指数により、$GW_{2m}(G,\mathbb{Z})$ の多くの部分をはかることができるので、わかりやすい。$*$=奇数のときには $GW_{2m+1}^{\chi}(G,\mathbb{Z})$ の定義には多少便宜的な部分もあるので、今のところよくわからない。Gが偶数位数の場合には $GW_*^{\chi}(G,\mathbb{Z})$ の解析は大変むつかしいようである。

上の commutative diagram の証明は、Ranicki の algebraic surgery の手法を用いて、全く代数的に行う。詳細は長くなるのではぶくが、要点は G-χ-多様体の G-chain 複体から Ranicki の方法により、G-Poincaré cobordism 群 $L_{G,\chi}^*(\mathbb{Z})$ を定義し、これと $GW_*^{\chi}(G,\mathbb{Z})$ との間の同型対応を与えることにある。残念ながら、具体的な目に立つ応用例は今のところ見当らない。又、Gが無限群の場合に同様な積公式を見出すことができれば、大変役に立つと思われるが、今のところ証明法はわからない。

G-χ-Witt 群の定義は次のようにする。$\mathbb{Z}[G]$ を G の整係数群環とし、involution ― を $\overline{\sum n_g g} = \sum n_g \chi(g) g^{-1}$ とおく ($n_g \in \mathbb{Z}$, $g \in G$)。有限生成 G-加群 V に対し、その双対加群 V^* を、V が $\mathbb{Z}$-free のとき $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \mathbb{Z})$, V が $\mathbb{Z}$-torsion のとき $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ とおき、$x \in \mathbb{Z}[G]$ に対し、x の $u \in V^*$ への作用を $(xu)(v) = u(\bar{x}v)$ $(v \in V)$ とおく。この作用により V^* は G-加群となり、又 G-準同型写像 $\beta: V_1 \to V_2$ に対しその dual G-準同型写像、$\beta^*: V_2^* \to V_1^*$ が通常のように定義される。又 V^{**} は V と標準的に同一視される。

(1) 偶数次元の場合

$\varepsilon = \pm 1$ とし ε-対称 G-χ-型式 (V, α) を、有限生成 $\mathbb{Z}$-free G-加群 V と G-同型写像 $\alpha: V \to V^*$ で $\alpha = \varepsilon\alpha^*$ をみたすものの対として定義する。2つの型式 (V_1, α_1), (V_2, α_2) に対し直交和 $(V_1, \alpha_1) \oplus (V_2, \alpha_2)$ が通常のように定義される。又、同型写像 $\beta: (V_1, \alpha_1) \to (V_2, \alpha_2)$ が G-同型写像で $\beta^* \circ \alpha_2 \circ \beta = \alpha_1$ をみたすものとして定義される。ε-対称 G-χ-型式 (V, α) の同型類の直交和に関する半群をつくりこれに付随する universal group を $Y_\varepsilon^\chi(G, \mathbb{Z})$ とかく。

G-χ-型式 (V, α) が split するとは G-部分加群 P で $P = P^{\perp} = \mathrm{Ker}(i^{*}\circ\alpha : V \longrightarrow P^{*})$ となるものがあることとする ($i: P \to V$ は包含写像)。

各 $k \geqq 0$ に対し $GW^{\chi}_{2k}(G, \mathbb{Z})$ を $\mathcal{Y}^{\chi}_{(-1)^k}(G, \mathbb{Z})$ の $(-1)^k$-対称 G-χ-型式で split するものから生成される部分群に関する residue class group と定義する。この定義は essential に A. Dress [2] によるものである。

(2) 奇数次元の場合

$\varepsilon = \pm 1$ に対し ε-対称 G-χ-linking 型式 (S, λ) を、有限生成 $\mathbb{Z}$-torsion G-加群 S と G-同型 $\lambda : S \to S^{*}$ で $\lambda = \varepsilon\lambda^{*}$ をみたすものの対とする。このような (S, λ) に対し次のような G-加群の完全系列がつねに存在する。

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\partial} S \longrightarrow 0$$

で双一次型式 $\Lambda : V \times V \longrightarrow \mathbb{Q}$ があり (i) U と V は有限生成 $\mathbb{Z}$-free G-加群, (ii) $\Lambda(gv, gv') = \chi(g)\Lambda(v, v')$ $(g \in G,\ v, v' \in V)$, (iii) $\Lambda(v, \beta(u)) \in \mathbb{Z}$, $\Lambda(\beta(u), v) \in \mathbb{Z}$ $(u \in U,\ v \in V)$ で Λ が S 上に induce する型式 $S \times S \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の adjoint は λ

に一致する。

このような完全系列 $0 \to U \to V \to S \to 0$ と Λ の対を (S, λ) の長さ1の G-resolution とよぶ。

2つの ε-対称 G-χ-linking 型式 (S_1, λ_1), (S_2, λ_2) に対し、直交和 $(S_1, \lambda_1) \oplus (S_2, \lambda_2)$ が定義される。又、同型写像 $\delta : (S_1, \lambda_1) \longrightarrow (S_2, \lambda_2)$ とは、G-同型写像 $\delta : S_1 \to S_2$ で $\delta^* \lambda_2 \delta = \lambda_1$ となるもののこととする。そこで ε-対称 G-χ-linking 型式の同型類の直交和に関する半群が構成され、付随する universal group を $W_\varepsilon^\chi(G, \mathbb{Z})$ とあらわす。

又、ε-対称 G-χ-linking 型式 (S, λ) について次の2条件を考える。

(a) 長さ1の G-resolution $0 \longrightarrow U \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\partial} S \longrightarrow 0$ で $\Lambda_V(v)(u) = \Lambda(v, \beta(u))$ $(u \in U,\ v \in V)$ で定義される写像 $\Lambda_V : V \longrightarrow U^*$ が同型写像。

(b) S の G-部分加群 Q で $Q = Q^\perp = \ker(i^* \circ \lambda : S \longrightarrow Q^*)$ となるものがある（ここに $i : Q \to S$ は包含写像）。

各 $k \geq 0$ に対し $GW^\chi_{2k+1}(G, \mathbb{Z})$ を $W^\chi_{(-1)^{k+1}}(G, \mathbb{Z})$ の (a) 又は (b) のいずれかをみたす $(-1)^{k+1}$-対称 G-χ-linking 型式から生成される部分群に関する

residue class group として定義する。

References

[1] J. P. Alexander et al. : Odd Order Group Actions and Witt Classification of Innerproducts, Lecture Note in Math 625. Springer

[2] A. Dress : Induction and structure theorems for orthogonal representations of finite groups, Ann. of Math. 102, 291-325.

[3] J. Morgan : A product formula for surgery obstructions, Mem. A.M.S. 201

[4] A. Ranicki : The algebraic theory of surgery I, Foundations, Proc London. M.S. (3) 40. 87-192

[5] A. Ranicki : The algebraic theory of surgery II. Applications to Topology, Proc London. M.S. (3) 40, 193-283

[6] J. Morgan, D. Sullivan : The transversality characteristic class and linking cycles in surgery theory, Ann. of Math. 99 (1974), 463-544